

Osserviamo ora che $u(\alpha) = 0$ se $\alpha < 0$, e che $u(t - \alpha) = 0$ se $\alpha > t$. Quindi, se $t \leq 0$ l'integrale a secondo membro della (E3.15.6) è *nullo* perché la funzione integranda è identicamente nulla. Se invece $t > 0$, vediamo subito che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\alpha)u(t - \alpha)d\alpha = \int_0^t 1d\alpha = t \quad (\text{E3.15.7})$$

dopo il primo segno di uguale, va tolta la "t" appena prima dell'integrale:

Quindi, rimettendo insieme i due casi relativi a $t > 0$ e $t < 0$, otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\alpha)u(t - \alpha)d\alpha = tu(t) \quad (\text{E3.15.8})$$

In questo esempio abbiamo eseguito la convoluzione tra due segnali *causali*, ottenendo il segnale (E3.15.5), a sua volta *causale*. Questa proprietà ha validità generale, come chi legge può facilmente verificare.

Esempio 3.16

Calcoliamo il risultato $z(t)$ della convoluzione tra un impulso rettangolare di durata T e un esponenziale causale:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \quad (\text{E3.16.1})$$

dove $x(t) = \text{rect}(t/T)$ e $y(t) = e^{-t/T}u(t)$. Dobbiamo dunque ricavare

$$z(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} y(\alpha)x(t - \alpha)d\alpha \quad (\text{E3.16.2})$$

Poiché $x(t - \alpha) = 1$ per $-T/2 \leq t - \alpha \leq T/2$ e 0 altrove, possiamo limitare gli estremi dell'integrale all'intervallo $[t - T/2, t + T/2]$:

$$z(t) = \int_{\alpha=t-T/2}^{t+T/2} y(\alpha)d\alpha \quad (\text{E3.16.3})$$

Nel caso rappresentato nella **Figura 3.30(a)**, poiché l'intersezione tra i supporti dei due segnali è vuota, il risultato della convoluzione è nullo. Ciò si verifica se $t + T/2 < 0$, ovvero per $t < -T/2$. Pertanto, abbiamo che

$$z(t) = 0 \quad \text{per } t < -\frac{T}{2} \quad (\text{E3.16.4})$$

Quando invece $t + T/2 \geq 0$, ma $t - T/2 \leq 0$, ovvero per $t \in [-T/2, T/2]$, ci troviamo nella situazione rappresentata nella **Figura 3.30(b)**. Analiticamente otteniamo

$$z(t) = \int_{\alpha=0}^{t+T/2} e^{-\alpha/T}d\alpha = -Te^{-\alpha/T}\Big|_0^{t+T/2} = Te^{-t/T} \frac{\sqrt{e} \cdot e^{t/T} - 1}{\sqrt{e}} \quad (\text{E3.16.5})$$